

06-03 Graphes probabilistes

Définitions

Un graphe orienté est **pondéré** lorsqu'à chaque arête est associé un nombre, appelé **poids de l'arête**.

Un graphe **probabiliste** est un graphe pondéré dans lequel les poids des arêtes sont tous compris entre 0 et 1 et tel que la somme des poids des arêtes partant d'un même sommet vaut 1.

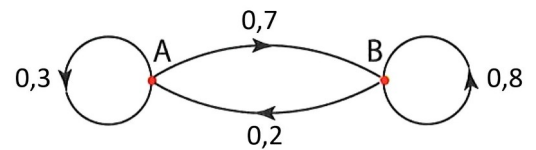
Les sommets d'un graphe probabiliste sont ses **états**.

Une matrice est la **matrice de transition** d'un graphe probabiliste si le coefficient situé en ligne i et en colonne j est le poids de l'arête allant de l'état i vers l'état j .

Exemple

Le graphe pondéré ci-contre est un graphe probabiliste ayant deux états.

Sa matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.



Définitions

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) modélisant l'évolution par étapes d'un système.

La loi de probabilité de X_n est appelée **distribution du système après n transitions**.

Elle se note sous la forme d'une matrice ligne, généralement appelée π_n .

La suite (X_n) est une **chaîne de Markov** lorsque la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas du nombre de transitions déjà effectuées.

Exemple

Un chat a l'habitude de dormir soit sur une armoire (événement A) soit dans son bac (événement B).

Ce matin, il s'est réveillé sur une armoire et chaque soir, il choisit ainsi :

- s'il a dormi sur une armoire, il a 30 % de chances de recommencer la nuit suivante.
- s'il a dormi dans son bac, il a 80 % de chances de recommencer la nuit suivante.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_0 est la distribution $\pi_0 = (1 \ 0)$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est la distribution $\pi_1 = (0,3 \ 0,7)$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_2 est la distribution $\pi_2 = (0,23 \ 0,77)$.

Propriétés

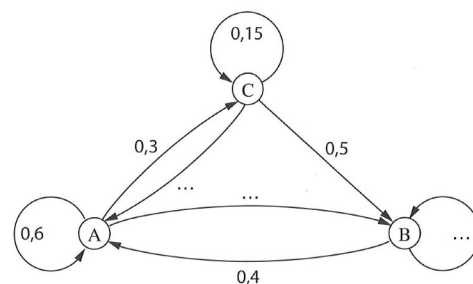
Soit M la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

- La distribution π_{n+1} s'obtient en multipliant la distribution π_n par M .
- Dans la matrice M^p , le coefficient situé en ligne i et en colonne j est égal à la probabilité de passer de l'état i à l'état j en p étapes.

06-03 Applications du cours

Application 1

- Justifier que la matrice $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de transition et construire le graphe pondéré associé.
- Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre.
 - Écrire la matrice de transition associée à ce graphe.



Application 2

Un robot se déplace sur les sommets d'un triangle ABC :

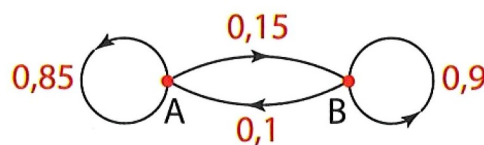
- s'il est en A , il a 30 % de chances d'aller en B , 30 % de chances d'aller en C , sinon il reste sur place.
 - s'il est en B , il choisit indifféremment de partir vers A ou C sans jamais rester sur place.
 - s'il est en C , il part en B neuf fois sur 10 ; sinon il part en A .
- Avec un arbre, déterminer la probabilité qu'en partant de A , il se retrouve en A après deux déplacements.
 - Construire le graphe probabiliste associé à la situation.
 - Déterminer la matrice de transition M associée à cette situation.
 - Soit (X_n) la suite de variables aléatoires modélisant l'évolution du système.
 - Justifier qu'il s'agit d'une chaîne de Markov.
 - Construire les lois de probabilités de X_0 , X_1 et X_2 selon que le robot part de A ou B .
 - Retrouver certains des résultats précédents en calculant M^2 .
 - De quel point doit partir le robot pour maximiser ses chances d'être en C après 5 déplacements ?

Application 3

Deux émissions de télévision concurrentes A et B ciblent le même public de téléspectateurs.

L'évolution de la répartition du public d'une semaine à l'autre est modélisée par une chaîne de Markov associée au graphe ci-contre.

Au début de l'étude, 70 % des téléspectateurs regardent l'émission A .



- Déterminer après combien de semaines l'audience de l'émission B dépasse celle de l'émission A .
- Écrire le programme Python permettant de répondre à la question 1.
- Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement du public après un grand nombre de semaines ?